

Universidade Federal de Pernambuco  
 Projeto Estrutural  
 Prof - Adriano Dayvson  
 Engenharia Naval



### Critério de Von Mises

Teoria da Energia de Distorção Máxima, Critério de Von Mises e H. Hencky

Um material quando deformado por uma carregamento externo tende a armazenar energia internamente em todo o seu volume. A energia por unidade de volume do material é chamada densidade de energia de deformação  $u$ , se ele estiver sujeito a uma tensão uniaxial,  $\sigma$ , essa densidade é escrita como:

$$u := \frac{1}{2} \cdot \sigma \varepsilon \quad \sigma := \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \varepsilon := \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Este critério de falha é baseado nas distorções provocadas pela energia de deformação. A densidade de energia de deformação em um elemento de volume do material submetido às três tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , como na Figura 1(a) é dada por:

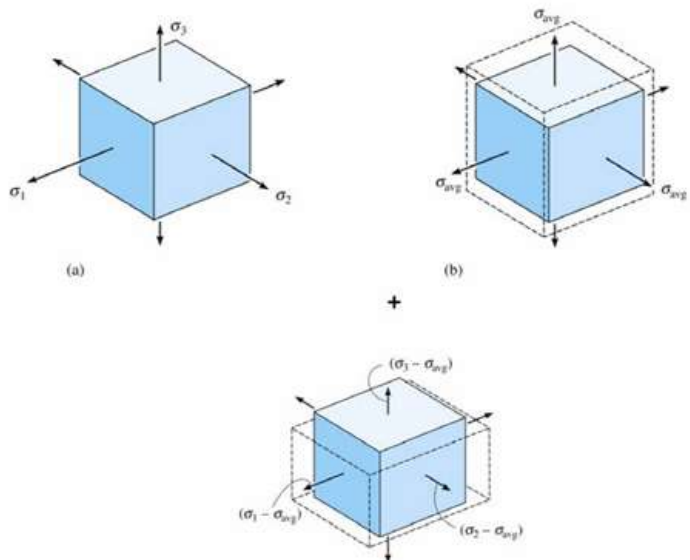
$$u := \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_3 \cdot \varepsilon_3$$

Se o material se comporta de maneira linear elástica a lei de Hooke se aplica. Portanto, substituindo a equação

$$\varepsilon_x := \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y := \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z := \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$



Simplificando obtemos

Figura 1

$$u := \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left( (\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3) \right)$$

Essa densidade de energia de deformação é considerada a soma de duas partes, uma das quais representa a energia necessária para provocar uma mudança de volume do elemento sem mudar a sua forma; e a outra, a energia necessária para distorcer o elemento.

Especificamente a energia armazenada no elemento como resultado da sua mudança de volume é provocada pela aplicação da tensão principal média,  $\sigma_{med} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ , uma vez que essa tensão provoca deformações principais iguais no material, como apresenta a Figura 1(b). A parte restante da tensão,  $(\sigma_1 - \sigma_{med})$ ,  $(\sigma_2 - \sigma_{med})$  e  $(\sigma_3 - \sigma_{med})$ , provoca a energia de distorção como apresenta a Figura 1(c).

$$\sigma_{med} := \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Experimentos demonstram que os materiais não escoam quando submetidos a uma tensão uniforme (hidrostática), tal como a  $\sigma_{med}$ . Com base nisso, em 1904, M. Huber propôs que ocorre escoamento em um material dúctil, quando a energia de distorção por unidade de volume do material é igual ou maior que a energia de distorção por unidade de volume do mesmo material quando ele é submetido a escoamento em um teste de tração simples.

Substituindo  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  por  $(\sigma_1 - \sigma_{med})$ ,  $(\sigma_2 - \sigma_{med})$  e  $(\sigma_3 - \sigma_{med})$ , respectivamente teremos:

$$u_d := \frac{1+\nu}{6 \cdot E} \cdot \left( (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)$$

No caso de estado plano de tensões em que:  $\sigma_3 := 0$

$$u_d := \frac{1+\nu}{6 \cdot E} \cdot \left( (\sigma_1)^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2) + (\sigma_2)^2 \right)$$

Em um teste de tração uniaxial temos:  $\sigma_1 := \sigma E$      $\sigma_2 := 0$      $\sigma_3 := 0$

$$u_d E := \frac{1+\nu}{3 \cdot E} \cdot (\sigma E)^2$$

Como a teoria da energia de distorção máxima requer que  $u_d := u_d E$

$$\left( (\sigma_1)^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2) + (\sigma_2)^2 \right) = \sigma E^2$$

$\sigma_e := 235$      $np := 50$

$a := 1$

for  $i \in 1 \dots np$

$$\begin{aligned} X_i &:= i \cdot \frac{\sigma_e}{np} \\ b &:= -X_i \\ c &:= (X_i)^2 - \sigma_e^2 \\ Y_i &:= \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}}{2 \cdot a} \end{aligned}$$

for  $i \in 1 \dots np$

$$\begin{aligned} Y_{i+np} &:= \left( \sigma_e - i \cdot \frac{\sigma_e}{np} \right) \\ b &:= -Y_{i+np} \\ c &:= (Y_{i+np})^2 - \sigma_e^2 \\ X_{i+np} &:= \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}}{2 \cdot a} \end{aligned}$$

for  $i \in 1 \dots np$

$$\begin{aligned} X_{i+2 \cdot np} &:= \left( \sigma_e - i \cdot \frac{\sigma_e}{np} \right) \\ b &:= -X_{i+2 \cdot np} \\ c &:= (X_{i+2 \cdot np})^2 - \sigma_e^2 \\ Y_{i+2 \cdot np} &:= \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}}{2 \cdot a} \end{aligned}$$

for  $i \in 1 \dots np$

$$\begin{aligned} X_{-i+4 \cdot np} &:= \left( -\sigma_e + i \cdot \frac{\sigma_e}{np} \right) \\ b &:= -X_{-i+4 \cdot np} \\ c &:= (X_{-i+4 \cdot np})^2 - \sigma_e^2 \\ Y_{-i+4 \cdot np} &:= \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}}{2 \cdot a} \end{aligned}$$

for  $i \in 0 \dots 2 \cdot np$

$$\begin{aligned} Y_{i+4 \cdot np} &:= \left( -\sigma_e + i \cdot \frac{\sigma_e}{np} \right) \\ b &:= -Y_{i+4 \cdot np} \\ c &:= (Y_{i+4 \cdot np})^2 - \sigma_e^2 \\ X_{i+4 \cdot np} &:= \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}}{2 \cdot a} \end{aligned}$$

vM:= augment(Y; X)

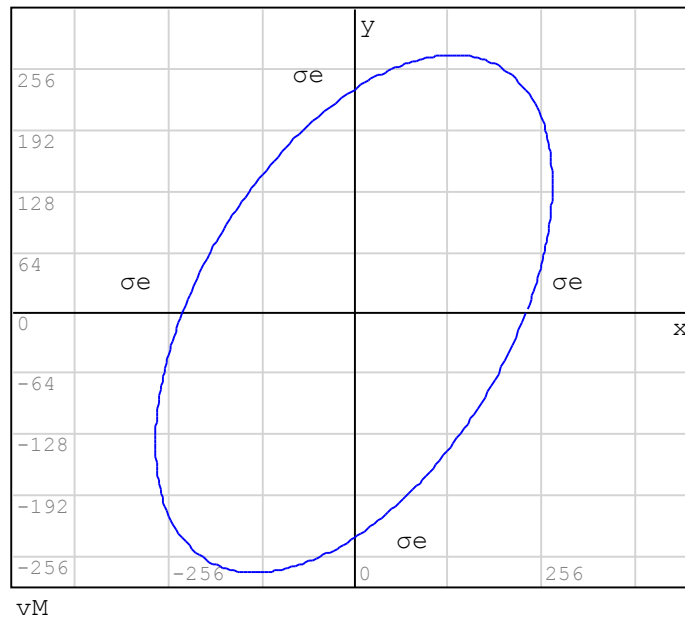


Figura 2 - Representação Gráfica do Critério

### Equações Von Mises

$$\sigma := \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

### Geral (Sem Restrições)

$$\sigma_v := \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6 \cdot \left( (\sigma_{12})^2 + (\sigma_{23})^2 + (\sigma_{32})^2 \right) \right)}$$

### Tensões Principais (Sem Restrições)

$$\sigma_v := \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)}$$

### Estado Plano de Tensões

$$\sigma_{33} := 0 \quad \sigma_{31} := 0 \quad \sigma_{13} := 0 \quad \sigma_{23} := 0 \quad \sigma_{32} := 0$$

$$\sigma_v := \sqrt{(\sigma_{11})^2 - \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} + (\sigma_{22})^2 + 3 \cdot (\sigma_{12})^2}$$

### Plano Principal de Tensões

$$\sigma_{11} := 0 \quad \sigma_{22} := 0 \quad \sigma_{33} := 0 \quad \sigma_{12} := 0 \quad \sigma_{21} := 0$$

$$\sigma_v := \sqrt{\left(\sigma_1\right)^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \left(\sigma_2\right)^2}$$

### Cisalhamento Puro

$$\sigma_{33} := 0 \quad \sigma_{31} := 0 \quad \sigma_{13} := 0 \quad \sigma_{23} := 0 \quad \sigma_{32} := 0 \quad \sigma_{11} := 0 \quad \sigma_{22} := 0$$

$$\sigma_v := \sqrt{3} \cdot |\sigma_{12}|$$

### Uniaxial

$$\sigma_{22} := 0 \quad \sigma_{33} := 0 \quad \sigma_{31} := 0 \quad \sigma_{13} := 0 \quad \sigma_{23} := 0 \quad \sigma_{32} := 0 \quad \sigma_{12} := 0 \quad \sigma_{21} := 0$$

$$\sigma_v := \sigma_{11}$$

### Comparação entre Tresca e von Mises

