

Universidade Federal de Pernambuco  
 Projeto Estrutural  
 Prof - Adriano Dayvson  
 Engenharia Naval  
[adrianodayvson.github.io](https://github.com/adrianodayvson)

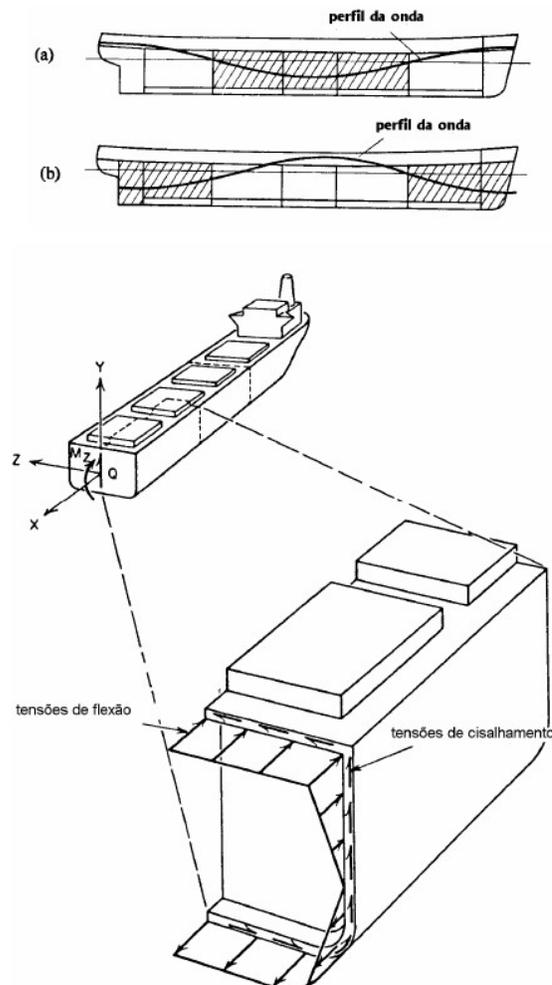


## FLAMBAGEM DE PLACAS

Em várias partes da estrutura de um navio encontramos unidades de chapeamento sobre cujos lados atuam cargas paralelas ao plano da placa, de compressão de cisalhamento, simultaneamente, ou não, com cargas laterais.

Assim é que no convés, por exemplo, uma unidade de chapeamento pode sofrer ação das tensões primárias de compressão, além de cargas laterais, como pode ser visto na figura a seguir.

O mesmo se poderia dizer de uma unidade de chapeamento do fundo do navio. Já no costado, a cerca de um quarto do comprimento do navio e na altura do eixo neutro, uma unidade de chapeamento apresenta tensões de cisalhamento atuantes sobre os seus lados, e que correspondem, em geral, a um máximo das tensões de cisalhamento da viga navio.



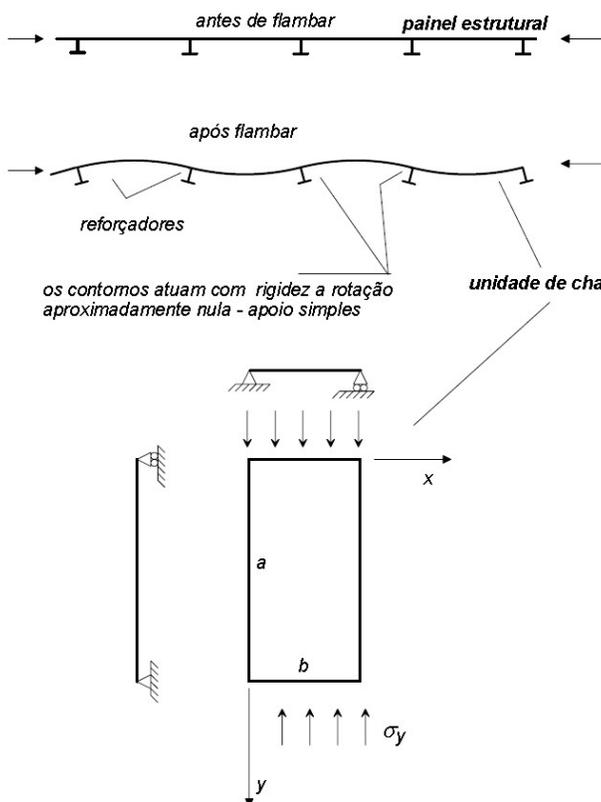
Sabe-se que, para certos valores dessas cargas atuantes no plano da placa, pode ocorrer uma brusca mudança de deflexão da unidade, causando deformações permanentes ou não, e que possivelmente não serão toleráveis pelos critérios de projeto. É possível ocorrer instabilidade na unidade de chapeamento.

Se considerarmos, agora, um painel completo de chapeamento, formado por placas e seus perfis longitudinais e transversais, entre duas anteparas consecutivas, poderemos fazer considerações análogas notando, porém, que as consequências da instabilidade, por afetarem parte bem maior da estrutura, são mais graves.

Caso fixemos a atenção em uma parte de um painel, apenas, envolvendo algumas unidades de chapeamento e certos perfis, poderemos repetir mais uma vez aquelas apreciações, o que também acontecerá se considerarmos apenas perfis

Ilustraremos o processo delineando a formulação e resolução do problema de instabilidade de uma placa fina, plana, retangular, comprimida uniformemente em uma direção e simplesmente apoiada nos quatro lados.

Conforme já mencionado anteriormente, o chapeamento da estrutura de um navio é dividido em pequenas unidades de chapeamento por meio de reforçadores longitudinais e transversais. Estes reforçadores garantem uma elevada rigidez aos deslocamentos transversais da placa, porém o mesmo não se pode dizer quanto à rigidez à rotação.



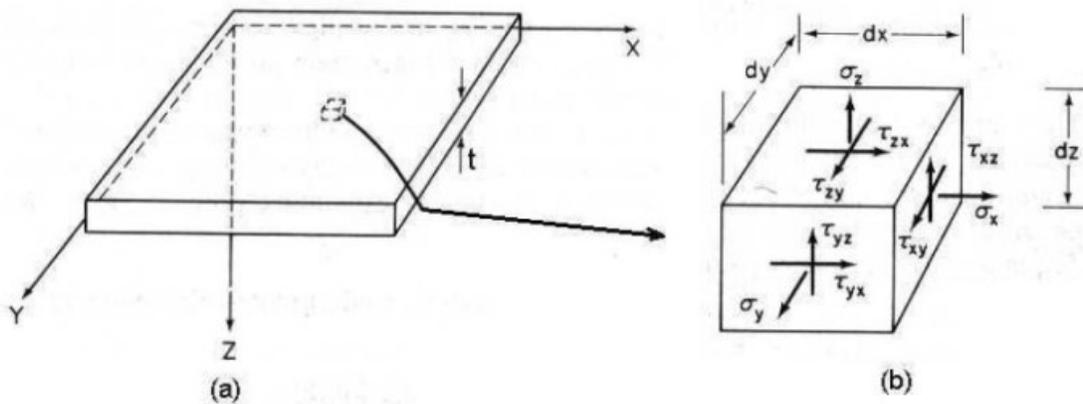
Considerando a seção longitudinal de um convés cavernado transversalmente quando ocorrer flambagem o chapeamento tomara a configuração mostrada na figura com os vaus rotacionando.

A rotação dos vaus faz com que estes imponham, nos contornos da unidade de chapeamento, um momento fletor que é função das propriedades de torção dos perfis.

Porém sabe-se que a rigidez a torção de perfis abertos é muito pequena, fazendo com que os momentos nos contornos da placa assumam valores desprezíveis, garantindo o simples apoio como condição de contorno para a unidade de chapeamento.

## Teoria de pequenas deflexões em placas finas

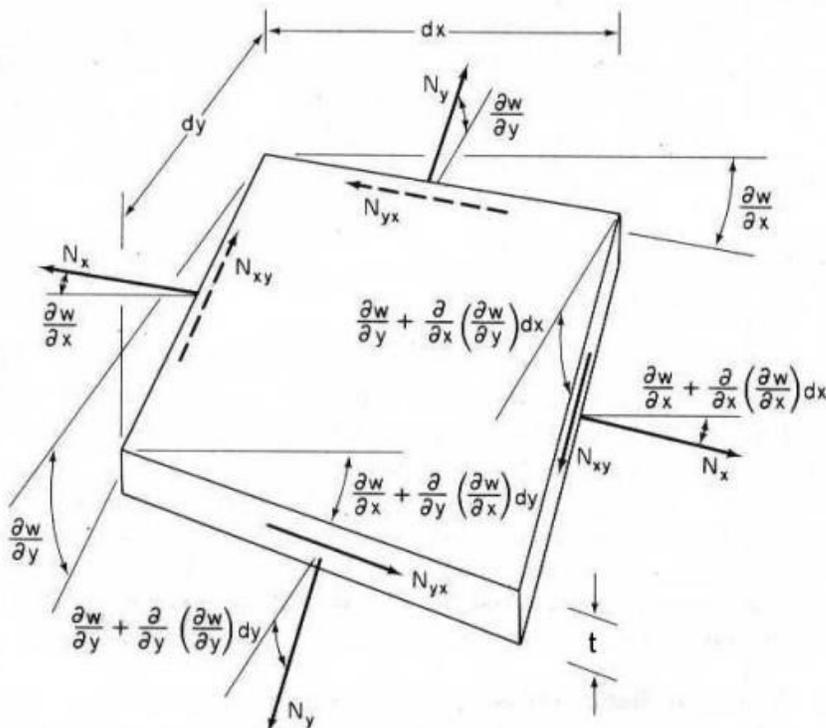
- Considere a placa de espessura uniforme  $t$ , mostrada na Fig. 1a. Os eixos de coordenadas  $x$  e  $y$  são direcionados ao longo das bordas da placa e o eixo  $z$  é direcionado verticalmente, para baixo. O plano  $xy$ , à meia altura entre as duas faces da placa, é chamado de superfície média. A Fig. 1b mostra um elemento diferencial da placa.
- Em cada lado do elemento pode existir uma tensão normal  $\sigma$  e duas tensões de cisalhamento  $\tau$ . Costuma-se designar planos num corpo físico pela direção de suas normais.
- A tensão normal atuando num plano então carrega a mesma designação que o plano. A designação da tensão de cisalhamento consiste de duas partes; a primeira denota o plano sobre o qual age e a segunda, a direção da tensão.

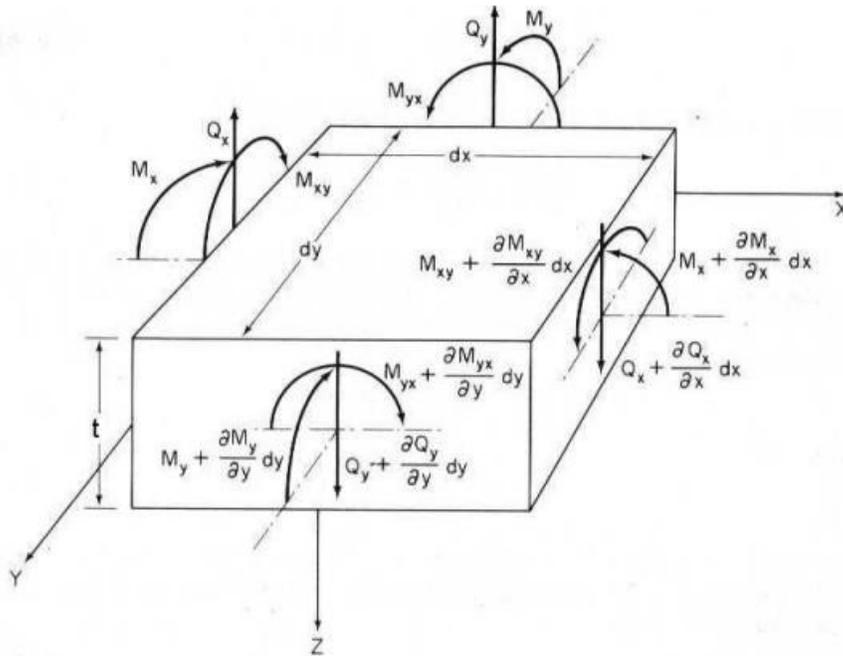


- Placas podem ser classificadas em três categorias: Placas espessas, placas finas e membranas. Se a espessura da placa é considerável, se comparada às outras dimensões, deformações de cisalhamento tendem a ser da mesma ordem de grandeza das deflexões de flexão e, portanto, têm de ser consideradas na análise. Tais placas são denominadas de placas espessas.
- Por outro lado, placas finas são aquelas em que a espessura é pequena comparada às outras dimensões e deformações de cisalhamento são desprezíveis comparadas às deflexões de flexão.
- Um terceiro grupo conhecido por membranas consiste de placas cuja espessura é tão fina que a rigidez em flexão tende a zero, e cargas transversais devem ser resistidas quase que exclusivamente pela ação de membrana. Neste capítulo somente placas finas serão consideradas.

As deformações de cisalhamento  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são desprezíveis,

- A tensão normal  $\sigma_z$  e a deformação correspondente  $\epsilon_z$  são desprezíveis e, portanto, a deflexão transversal de qualquer ponto  $(x, y, z)$  é igual à deflexão transversal do ponto correspondente  $(x, y, 0)$  na superfície média.
- As deflexões transversais da placa são pequenas quando comparadas à espessura.
- O material da placa é homogêneo, isotrópico e segue a lei de Hooke.





A Fig. anterior mostra os momentos fletores e torsões, bem como as forças de cisalhamento. Estas quantidades também são distribuídas, ou seja, por unidade de comprimento. Notando que, para equilíbrio de momentos em torno do eixo z,  $N_{xy} = N_{yx}$  é condição necessária, e a equação de equilíbrio de forças na mesma direção z pode ser escrita como:

$$\frac{\delta Q}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + N_x \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} + N_y \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} + 2 \cdot N_{xy} \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x \delta y} := 0$$

• Se os termos de ordem superior são desprezados, o equilíbrio de momentos e torno dos eixos x e y podem ser escritos, respectivamente, como

$$\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta M}{\delta x} - Q_y := 0$$

$$\frac{\delta M}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y} - Q_x := 0$$

Derivando os termos acima e substituindo na equação anterior temos:

$$\frac{\delta^2 \cdot M}{\delta x^2} - 2 \cdot \frac{\delta^2 \cdot M}{\delta x \cdot \delta y} + \frac{\delta^2 \cdot M}{\delta y^2} + N_x \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} + N_y \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} + 2 \cdot N_{xy} \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x \delta y} := 0 \quad \text{Eq (04)}$$

A Eq. (04) contém 4 incógnitas:  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  e  $w$ . Para obter-se uma solução, é óbvio que faltam mais três relações. Uma vez que não há mais condições de equilíbrio a serem utilizadas, estas relações adicionais terão que ser obtidas considerando-se a deformação da placa. Os momentos são devidos às tensões, cuja magnitude é proporcional à distância da superfície média

$$M_x := \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x \cdot z \, dz \quad M_y := \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y \cdot z \, dz \quad M_{xy} := - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yx} \cdot z \, dz$$

•A relação entre tensões e deformações para o estado plano de tensões é segundo a lei de Hooke em um regime linear é:

$$\sigma_x := \frac{E}{1-\nu} \cdot \left( \xi_x - \nu \cdot \xi_y \right)$$

$$\sigma_y := \frac{E}{1-\nu} \cdot \left( \xi_y - \nu \cdot \xi_x \right)$$

$$\tau_{xy} := \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \gamma_{xy}$$

Podemos obter da mesma forma que a equação da linha elástica as relações entre deformações e deslocamentos de flexão  $w$ :

$$\xi_x := -z \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} \quad \xi_y := -z \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} \quad \gamma_{xy} := -2 \cdot z \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x \cdot \delta y}$$

Substituindo

$$\sigma_x := \frac{E \cdot z}{1 - \nu} \cdot \left( \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} - \nu \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} \right)$$

$$\sigma_y := \frac{E \cdot z}{1 - \nu} \cdot \left( \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} - \nu \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} := \frac{E \cdot z}{(1 + \nu)} \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x \cdot \delta y}$$

E resolvendo a integral:

Obs:

$$\text{maple} \left[ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 \, dz = \frac{t^3}{12} \right]$$

$$M_x := -D \cdot \left( \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} - \nu \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} \right)$$

$$M_y := -D \cdot \left( \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} - \nu \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} \right)$$

$$M_{xy} := -D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x \cdot \delta y}$$

onde D (rigidez a flexão) é:

$$D := \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

E substituindo na Eq (04):

$$D \cdot \left( \frac{\delta^4 \cdot w}{\delta x^4} + \frac{2 \cdot \delta^4 \cdot w}{\delta x^2 \cdot \delta y^2} + \frac{\delta^4 \cdot w}{\delta y^4} \right) := N_x \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} + N_y \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} + 2 \cdot N_{xy} \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x \cdot \delta y}$$

Forma comumente apresentada:

$$\frac{\delta^4 \cdot w}{\delta x^4} + \frac{2 \cdot \delta^4 \cdot w}{\delta x^2 \cdot \delta y^2} + \frac{\delta^4 \cdot w}{\delta y^4} + \frac{1}{D} \cdot \left( N_x \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} + N_y \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} + 2 \cdot N_{xy} \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x \cdot \delta y} \right) := 0$$

Condições de Contorno

a) Para engaste - deslocamento e rotação nulas, respectivamente:

$$\frac{\delta w}{\delta x} := 0$$

b) apoio simples - deslocamento e momento fletor distribuído  $M_x$  nulos, respectivamente:

$$w := 0 \quad \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} - \nu \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} := 0$$

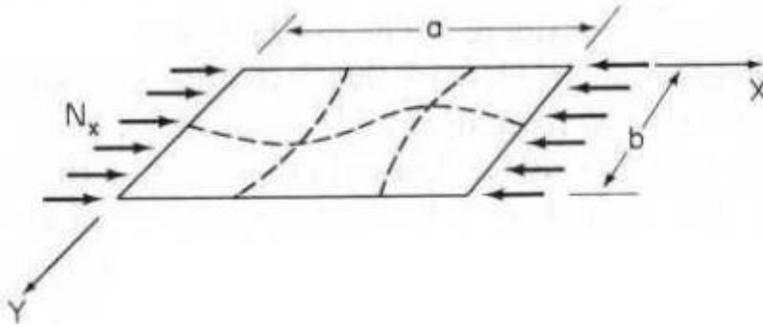
Lembrando da equação da Linha Elástica 1D

$$M := E \cdot I \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$$

c) livre - momento fletor distribuído e cisalhamento efetivo distribuído nulos, respectivamente:

$$\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} - \nu \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} := 0 \quad \frac{\delta^3 w}{\delta x^3} + 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\delta^3 w}{\delta x \cdot \delta y^2} + \frac{N_x}{D} \cdot \frac{\delta w}{\delta x} + \frac{N_{xy}}{D} \cdot \frac{\delta w}{\delta y} := 0$$

## Placa Simples apoiada com Carregamento Uniaxial



A placa está sujeita a uma carga de compressão,  $N_x$ , por unidade de comprimento uniformemente distribuída ao longo das bordas  $x = 0$  e  $x = a$ . Considera-se que as bordas da placa são livres para se mover no plano da placa e que, em conseqüência, cargas adicionais no plano da placa além daquelas aplicadas nas bordas não podem se desenvolver (note que, devido ao efeito do coeficiente de Poisson, se as bordas  $y=0$  e  $y=b$  não fossem permitidas se afastar, forças axiais de compressão na direção  $y$  se desenvolveriam na placa).

Fazendo  $N_y = N_{xy} = 0$ , a Eq. 5.12 pode ser escrita na forma:

$$\frac{\delta^4 \cdot w}{\delta x^4} + \frac{2 \cdot \delta^4 \cdot w}{\delta x^2 \cdot \delta y^2} + \frac{\delta^4 \cdot w}{\delta y^4} + \frac{N_x}{D} \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} := 0 \quad \text{Eq (01)}$$

CC #01

$$w := 0 \quad \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} - \nu \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} := 0 \quad \text{em } x=0, a \quad \text{Eq (02)}$$

$$w := 0 \quad \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} - \nu \cdot \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} := 0 \quad \text{em } y=0, b \quad \text{Eq (03)}$$

Tendo em vista a condição de que a deflexão ao longo de cada uma das bordas é nula, é evidente que

$$\frac{\delta^2 \cdot w}{\delta y^2} := 0 \quad \text{em } x=0, a \quad \frac{\delta^2 \cdot w}{\delta x^2} := 0 \quad \text{em } y=0, b \quad \text{Eq (04)}$$

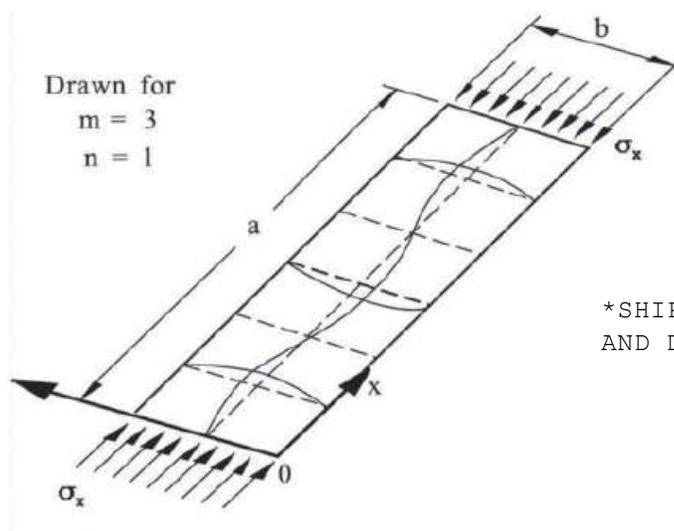
Em conseqüência, as condições de contorno (CC #01) podem ser simplificadas

$$w := \frac{\delta^2}{\delta x^2} \cdot w = 0 \quad \text{em } x=0, a \quad w := \frac{\delta^2}{\delta y^2} \cdot w = 0 \quad \text{em } y=0, b \quad \text{Eq (05)}$$

Considerando a solução da equação anterior seja da forma (Fourier):

$$w(x; y) := \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \quad \text{Eq (06)}$$

onde m e n representam o número de semi-ondas nas quais a placa flamba



Substituição das derivadas apropriadas na Eq.(01)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \left[ \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^4 + 2 \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^4 - \frac{N}{D} \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 \right] \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) := 0 \quad \text{Eq (07)}$$

A equação anterior consiste de uma soma de um número infinito de funções independentes. A única maneira de tal soma se anular, é todas as parcelas se anularem, ou seja

$$A_{mn} \cdot \left[ \pi^4 \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{N}{D} \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 \right] := 0 \quad \text{Eq (08)}$$

Solução não trivial:

$$N_x := \frac{D \cdot a^2 \cdot \pi^2}{m^2} \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad \text{ou} \quad N_x := \frac{D \cdot \pi^2}{b^2} \cdot \left( \frac{m \cdot b}{a} + \frac{n^2 \cdot a}{m \cdot b} \right) \quad \text{Eq (09)}$$

•De acordo com a Eq (09),  $N_x$  depende das dimensões e das propriedades físicas da placa, bem como de  $m$  e  $n$ , o número de semi-ondas nas quais a placa flamba. Como o valor crítico de  $N_x$  é o menor valor que satisfaz a Eq. (09), é necessário determinar os valores de  $m$  e  $n$  que minimizam Eq. (09). É óbvio que  $N_x$  aumenta com o aumento de  $n$ , de modo que  $n = 1$ . O número de semi-ondas nas quais a placa flamba na direção  $x$  é determinada minimizando-se a Eq. (09) com relação a  $m$ :

$$\frac{d}{d m} N_x := \frac{2 \cdot D \cdot \pi^2}{b^2} \cdot \left( \frac{m \cdot b}{a} + \frac{a}{m \cdot b} \right) \cdot \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{m^2 \cdot b} \right) = 0 \quad \text{Eq (10)}$$

onde a solução é:  $m := \frac{a}{b}$

Assim substituindo na Eq (09):

$$N_x := \frac{k \cdot \pi^2 \cdot D}{b^2} \quad \text{onde} \quad k := \left( \frac{m \cdot b}{a} + \frac{n^2 \cdot a}{m \cdot b} \right)^2 \quad \text{Eq (11)}$$

Substituindo e resolvendo podemos encontrar que com  $n = 1$ , temos o valor mínimo de  $k = 4$ .

Obs - A demonstração gráfica encontra-se na próxima página.

$$N_{x\_cr} := \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot D}{b^2} \quad \text{Eq (12)}$$

•Substituindo o  $D$  e  $N_x$  por  $\sigma_{cr} \cdot t$ , temos que a tensão crítica de flambagem é:

$$\sigma_{cr} := \frac{k \cdot \pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{\left( \frac{b}{t} \right)^2} \quad \text{Eq (13)}$$

Solução gráfica do problema para encontrar o k mínimo

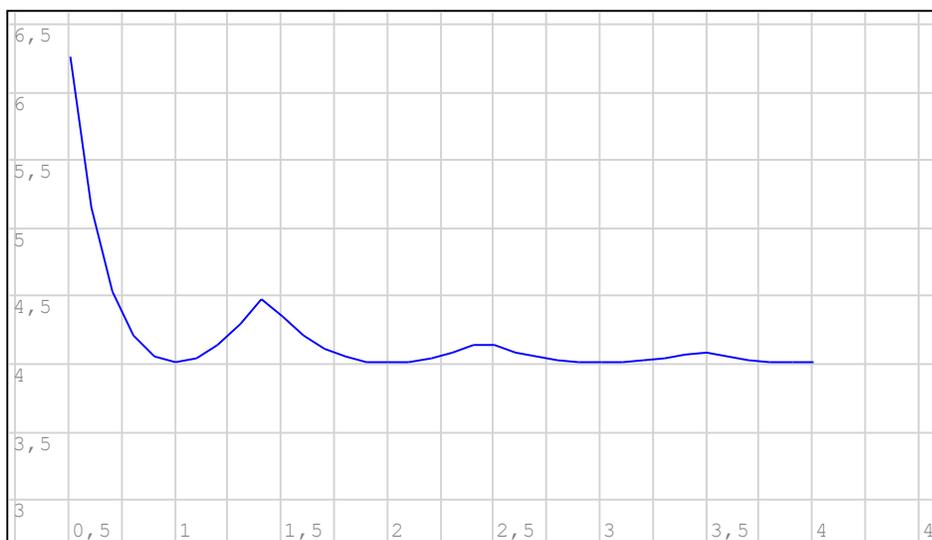
```
m := [1..2]  n := [1..2]
```

```
a_sobre_b := [0,5; 0,6..4]
```

$$k(a\_sobre\_b; m) := \left( \frac{m}{a\_sobre\_b} + \frac{a\_sobre\_b}{m} \right)^2$$

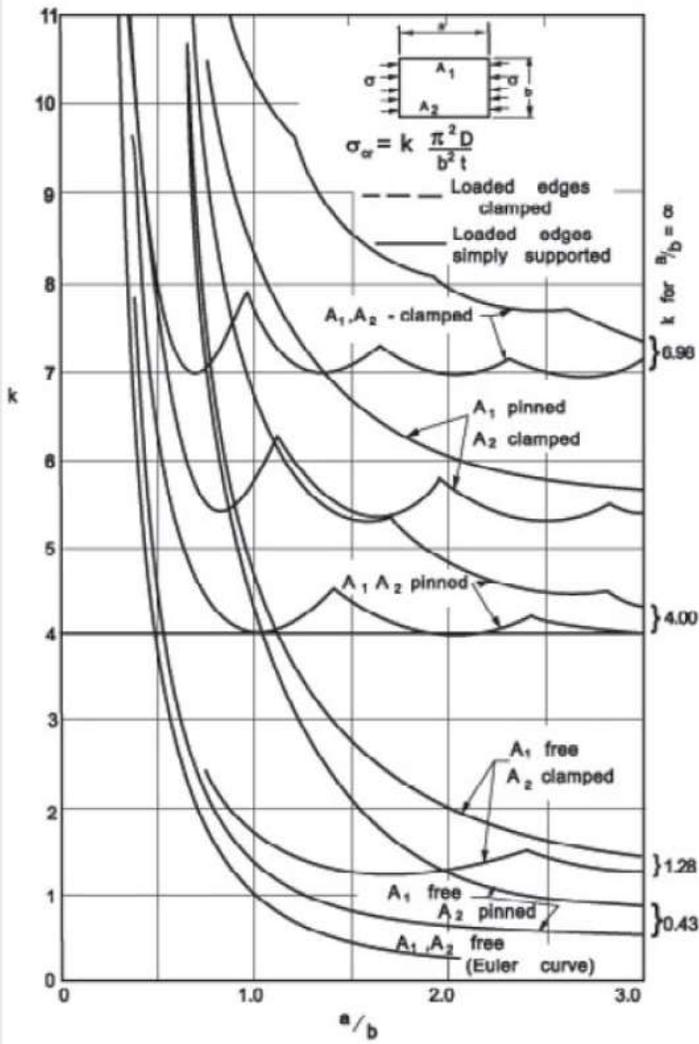
$$kmin(a\_sobre\_b) := \min \left( \begin{array}{l} k(a\_sobre\_b; 1) \\ k(a\_sobre\_b; 2) \\ k(a\_sobre\_b; 3) \\ k(a\_sobre\_b; 4) \end{array} \right)$$

```
for i ∈ [1..length(a_sobre_b)]
  kploti := kmin(a_sobre_bi)
```

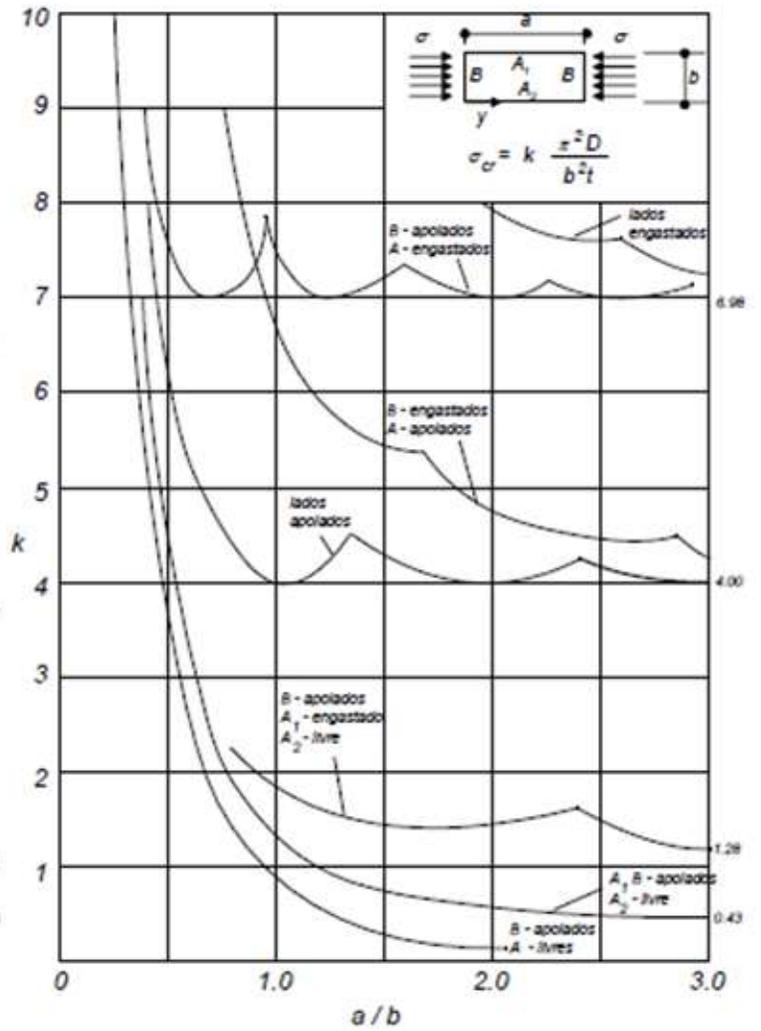


```
augment(a_sobre_b; kplot)
```

Solução gráfica para diversas condições de contorno



Hughes, 2010



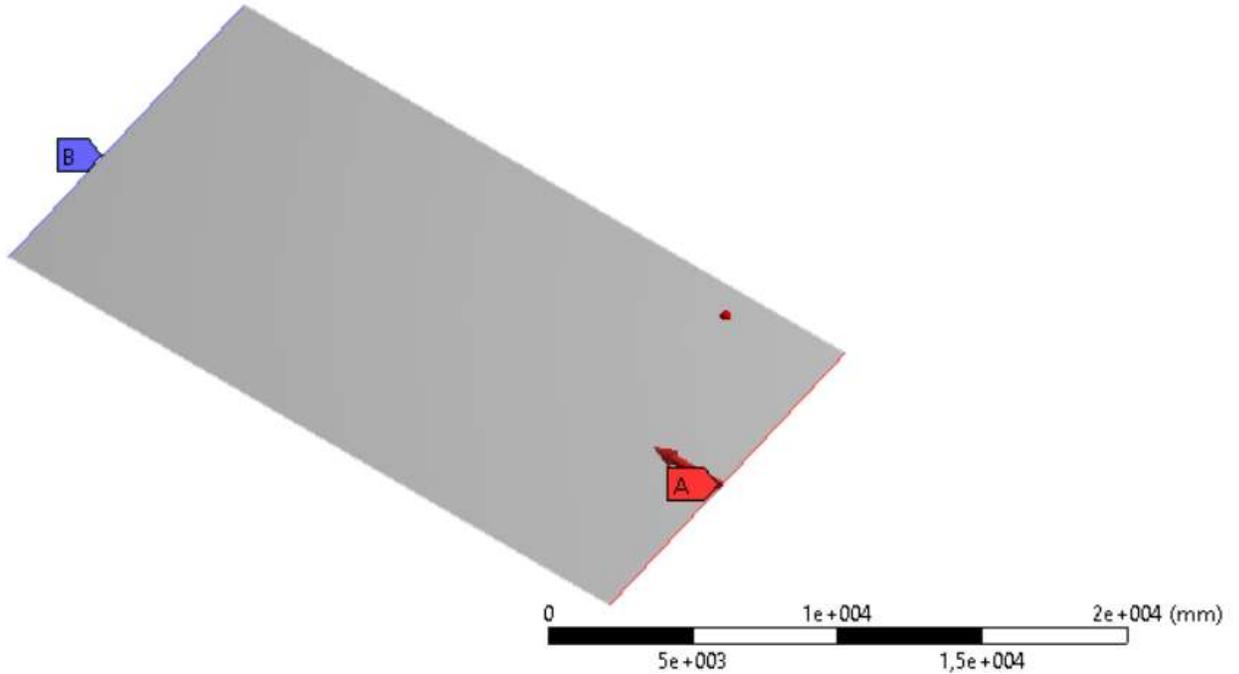
Apostila Projeto Estrutural

### Cálculo de flambagem utilizando elementos finitos

#### B: Static Structural

Static Structural  
Time: 1, s  
28/08/2017 21:15

- A** Force: 100, N
- B** Fixed Support

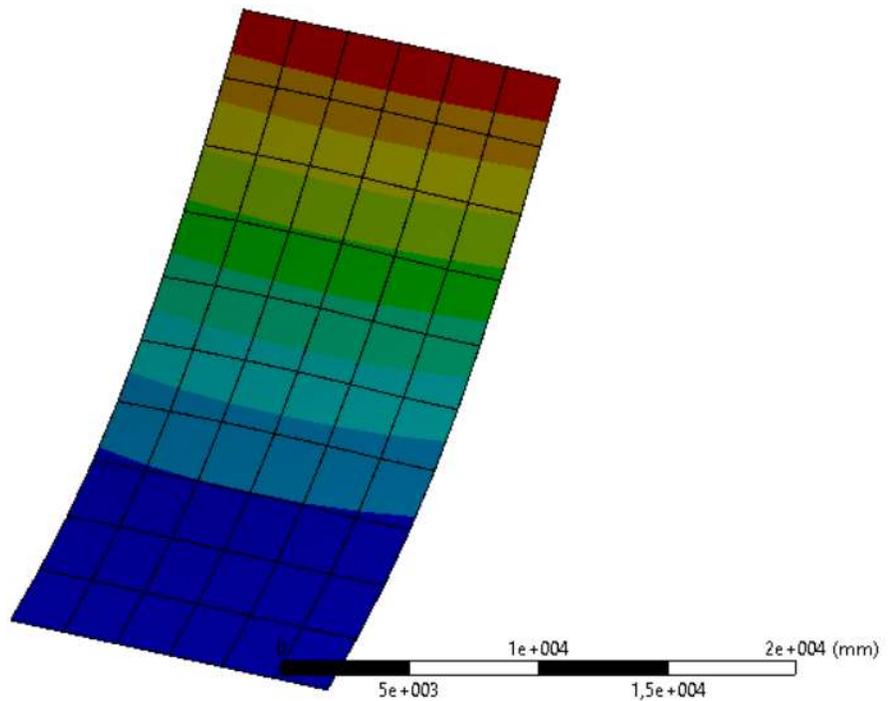


Flambagem em placa engastada em uma das extremidades

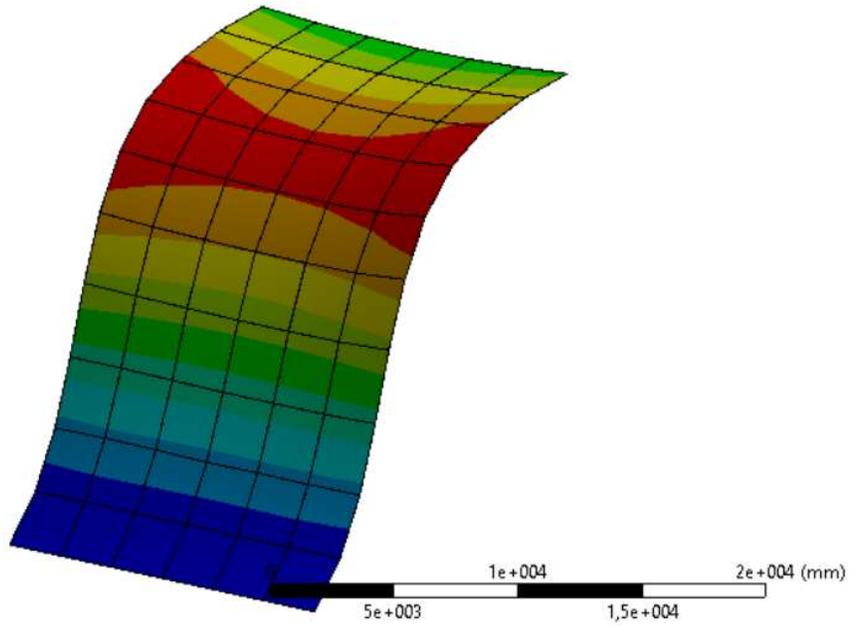
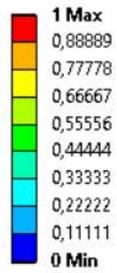
#### C: Eigenvalue Buckling

Total Deformation  
Type: Total Deformation  
Load Multiplier: 10,341  
Unit: mm  
28/08/2017 21:06

- 1 Max**
- 0,88889
- 0,77778
- 0,66667
- 0,55556
- 0,44444
- 0,33333
- 0,22222
- 0,11111
- 0 Min**

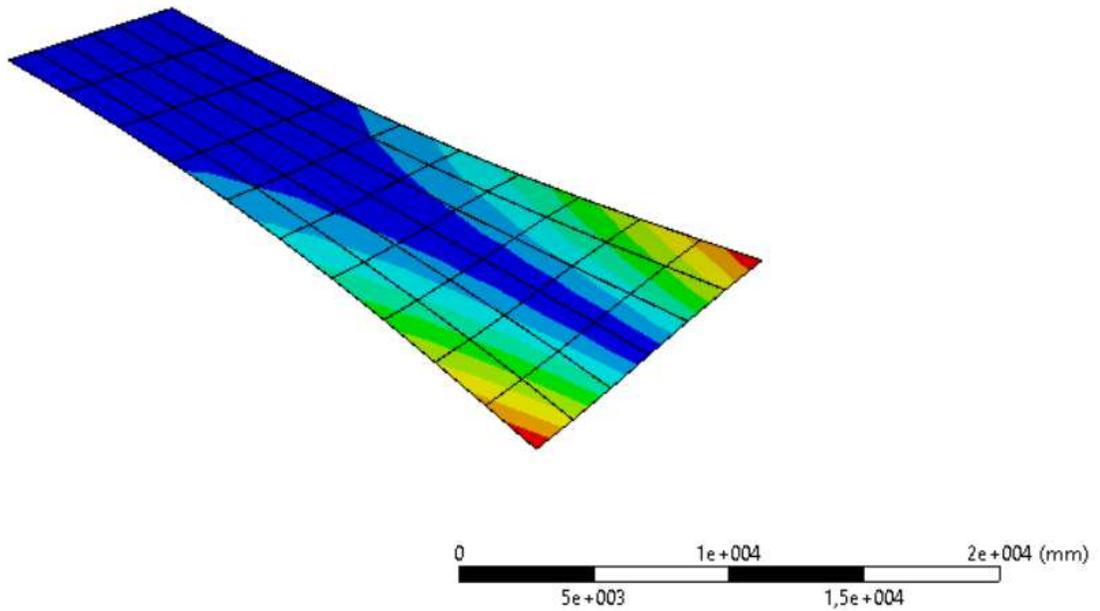
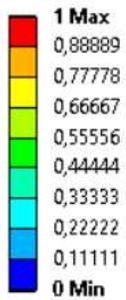


**C: Eigenvalue Buckling**  
Total Deformation 2  
Type: Total Deformation  
Load Multiplier: 96,462  
Unit: mm  
28/08/2017 21:08



Modo #02 de Flambagem

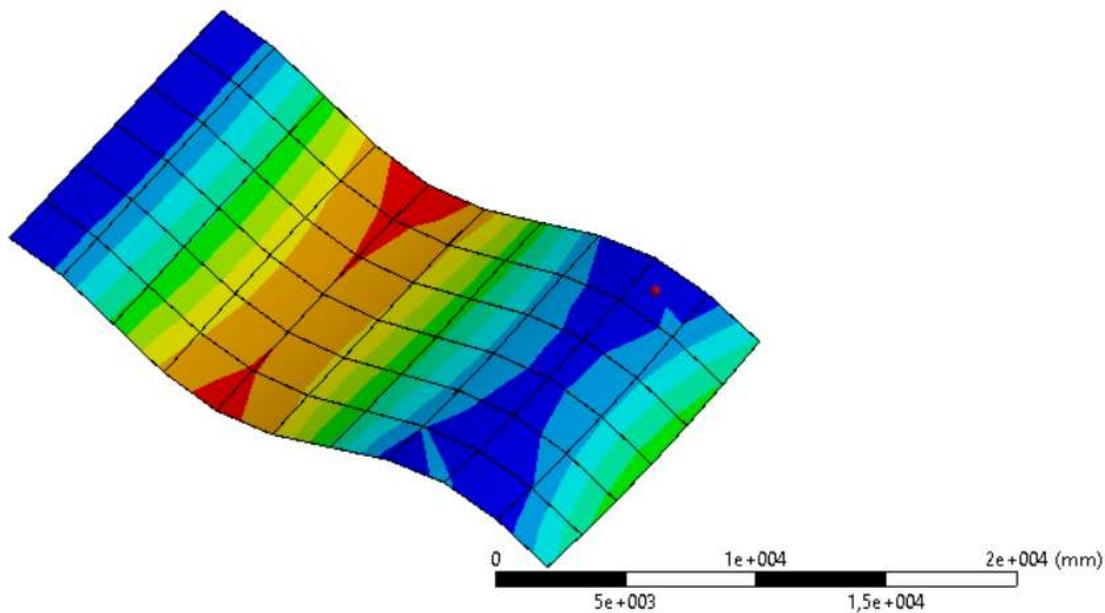
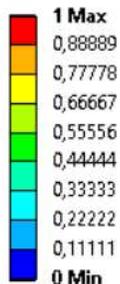
**C: Eigenvalue Buckling**  
Total Deformation 3  
Type: Total Deformation  
Load Multiplier: 209,07  
Unit: mm  
28/08/2017 21:11



Modo #03 de Flambagem

**C: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation 4  
Type: Total Deformation  
Load Multiplier: 291,41  
Unit: mm  
28/08/2017 21:14



Modo #04 de Flambagem

Cálculo de flambagem utilizando normas:

ABS PART 5A & 5B - Steel Vessels  
SPECIFIC VESSEL TYPES

Part 1 Cap-8 Section 5(2017) Pag-463(499 do pdf)

Buckling Capacity - Pag-495 (531 do pdf)

*Referências*

Apostila de Projeto Estrutural 1 UFPE - Baseado na apostila do Prof. Oscar Brito Augusto da EPUSP, para o Curso de Especialização em Engenharia Naval oferecido pela Universidade de Pernambuco em 2007.

Hughes, Owen F.\_ Paik, Jeom Kee-Ship Structural Analysis and Design-Society of Naval Architects and Marine Engineers (SNAME) (2010)