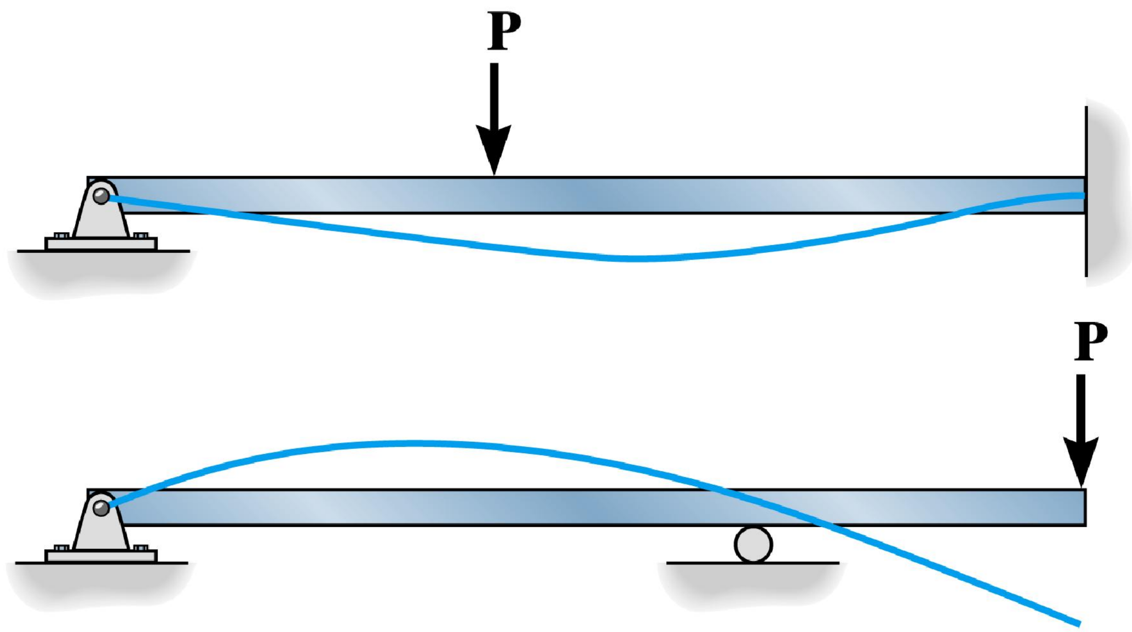
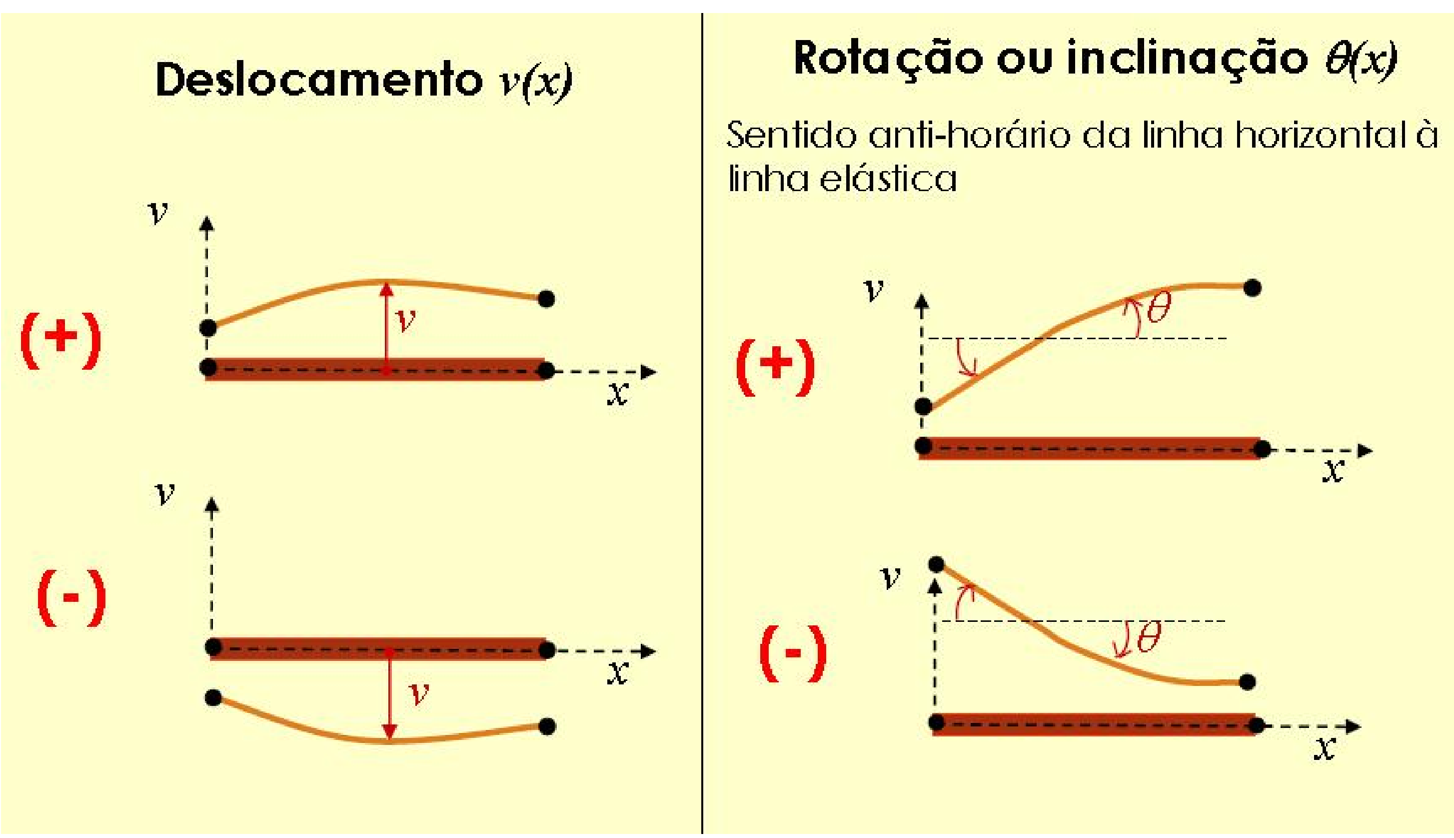
Universidade Federal de Pernambuco
Projeto Estrutural
Prof - Adriano Dayvson
Engenharia Naval
adrianodayvson.github.io

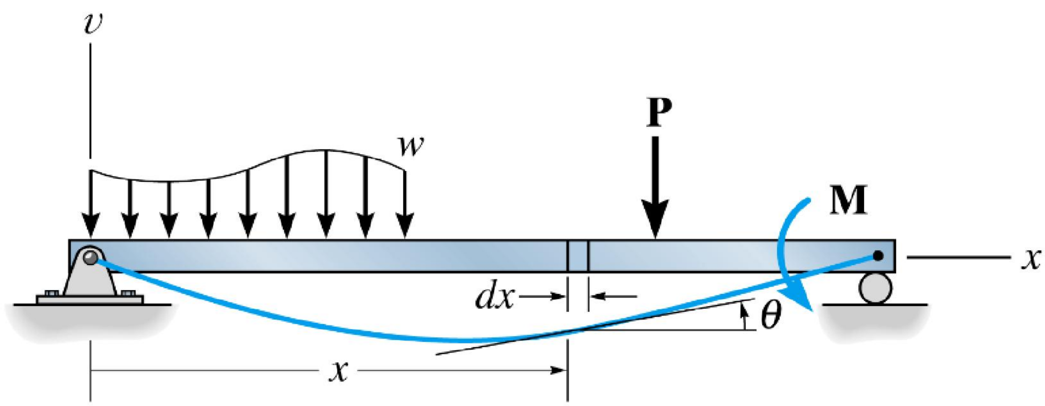
LINHA ELÁSTICA

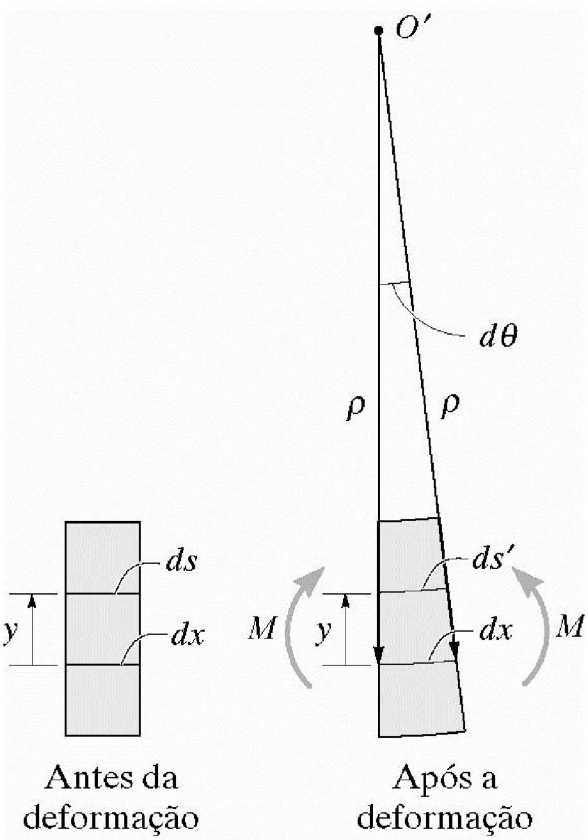


Convenção de Sinais



Cálculo da deformação





$$\varepsilon := \frac{ds' - ds}{ds}$$

$$ds := dx$$

$$dx := \rho \cdot d\theta \qquad ds' := (\rho - y) \cdot d\theta$$

$$\varepsilon := \frac{(\rho - y) \cdot d\theta - \rho \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta} \quad ; \quad \varepsilon := -\frac{y}{\rho}$$

$$k := \frac{1}{\rho} \quad ; \quad k := -\frac{\varepsilon}{y}$$

Lei de Hooke:

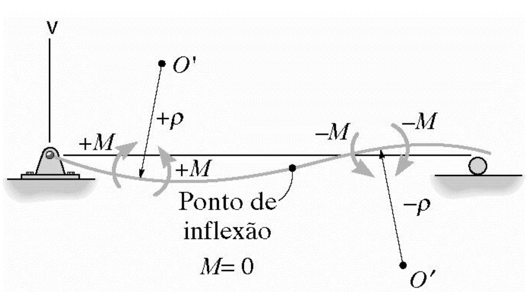
$$\sigma := E \cdot \varepsilon$$

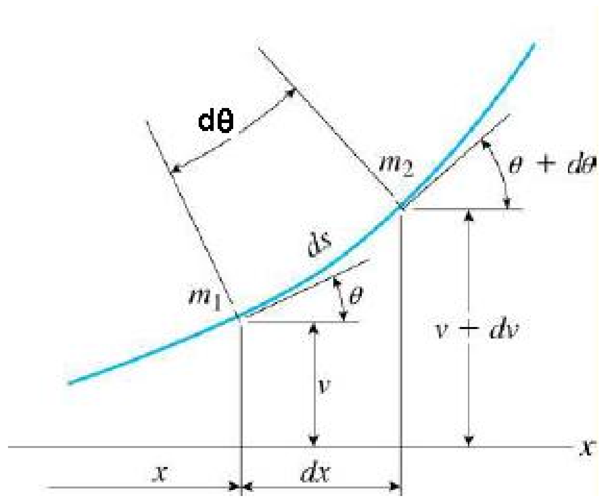
Tensão de flexão nesta viga:

$$\sigma := -\frac{M \cdot c}{I}$$

Fazendo as devidas substituições temos:

$$\frac{1}{\rho} := \frac{M}{E \cdot I}$$





Da Figura ao lado temos:

$ds := \rho \cdot d\theta \qquad k := \frac{d\theta}{ds}$

$\frac{dv}{dx} := \tan(\theta)$

Para pequenos ângulos de rotação,

θ tende a zero tornando ds~dx, então:

$k := \frac{d\theta}{dx}$

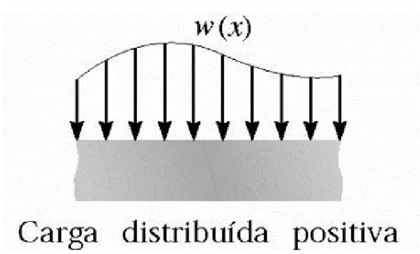
e tan(θ) tende a θ e:

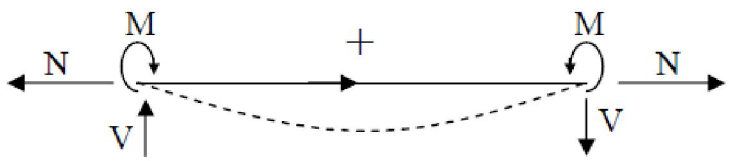
$\frac{dv}{dx} := \theta \quad e \quad \frac{d\theta}{dx} := \frac{d^2}{dx^2} v$

Assim temos que:

$$\frac{d^2}{dx^2} v := \frac{M}{E \cdot I}$$

Convenção de Sinais





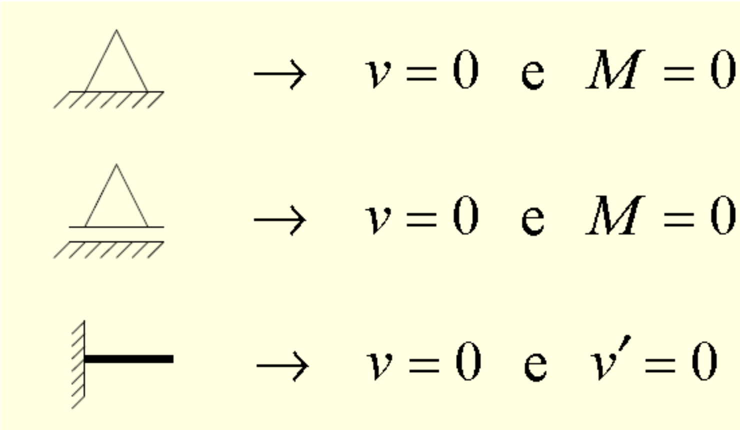
Sabendo que:

$$\frac{dV}{dx} := -w(x) \qquad \frac{dM}{dx} := V \qquad e \qquad M := E \cdot I \cdot \frac{d^2}{dx^2} v$$

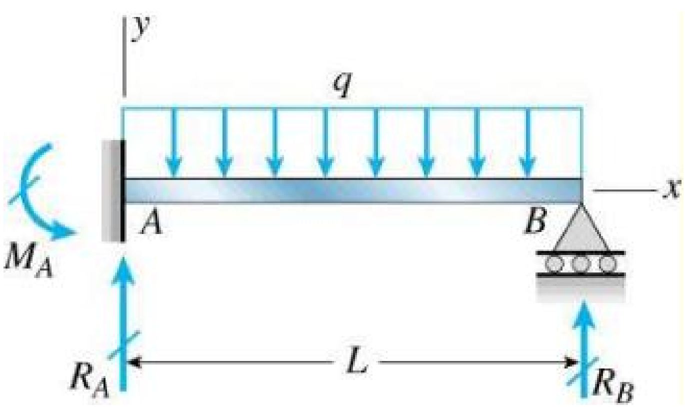
Se a rigidez da barra (E.I) for constante em relação a x, teremos:

$$M := E \cdot I \cdot \frac{d^2}{dx^2} v \qquad V := E \cdot I \cdot \frac{d^3}{dx^3} v \qquad q := E \cdot I \cdot \frac{d^4}{dx^4} v \qquad \frac{dv}{dx} := \theta$$

Condições de Contorno:



Vigas estaticamente indeterminadas



Vigas em que o número de reações é maior do que o número de equações de equilíbrio

$\sum Fx := 0 \quad H\_A := 0$

$\sum Fy := 0 \quad RA + RB - q \cdot L := 0$

$\sum MA := 0 \quad MA - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} + RB \cdot L := 0$

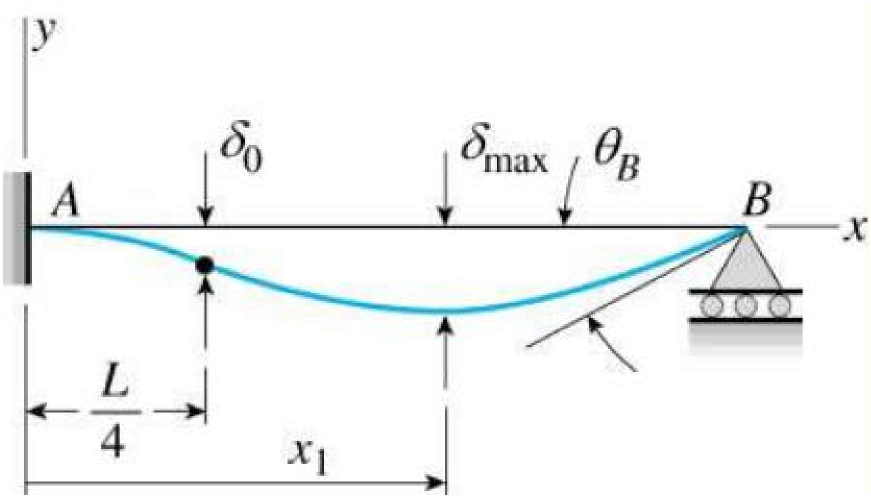
2 equações linearmente independentes e 3 incógnitas

São necessárias equações adicionais para obter todas as reações

O número de reações (incógnitas) em excesso em relação ao número de equações de equilíbrio é conhecido como Grau de Hiperestaticidade

A viga analisada tem então o grau de Hiperestaticidade igual a 1.

Para obter as demais equações necessárias para resolver o problema podemos utilizar uma das equações diferenciais da linha elástica e utilizar o mesmo procedimento usado para vigas isostáticas.



Supondo a deformada da viga analisada podemos obter as condições de contorno

Devemos encontrar a equação da variação do Momento em relação a x.

$$M := RA \cdot x - MA - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

Fazendo as devidas substituições com as equações já encontradas, temos:

$$M := \left(q \cdot L - RB\right) \cdot x - \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - RB \cdot L\right) - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

Equação da linha elástica:

$$M := E \cdot I \cdot \frac{d^2}{d x^2} v$$

Integrando temos:

$$E \cdot I \cdot \frac{d}{d x} v := \left(q \cdot L - RB\right) \cdot \frac{x^2}{2} - \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - RB \cdot L\right) \cdot x - \frac{q \cdot x^3}{6} + C1$$

Integrando novamente:

$$E \cdot I \cdot v := \left(q \cdot L - RB\right) \cdot \frac{x^3}{6} - \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - RB \cdot L\right) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{q \cdot x^4}{24} + C1 \cdot x + C2$$

Agora temos 3 incógnitas (C1, C2 e RB) e precisamos de 3 condições de contorno

Condições de Contorno

$x := 0 \; ; \; \frac{d}{dx} v := 0$ (I)

$x := 0 \; ; \; v := 0$ (II)

$x := L \; ; \; v := 0$ (III)

(I) $0 := 0 - 0 - 0 + C1$

$C1 := 0$

(II) $0 := 0 - 0 - 0 + 0 + C2$

$C2 := 0$

(III) $0 := (q \cdot L - RB) \cdot \frac{L^3}{6} - \left(\frac{q \cdot L^2}{2} - RB \cdot L \right) \cdot \frac{L^2}{2} - \frac{q \cdot L^4}{24}$

$$RB := \frac{3 \cdot q \cdot L}{8}$$

Rotações e Deflexões substituindo o RB nas equações encontradas

$$\frac{d}{dx} v := \frac{q \cdot x}{48 \cdot E \cdot I} \cdot \left(-6 \cdot L^2 + 15 \cdot L \cdot x - 8 \cdot x^2 \right)$$

$$v := -\frac{q \cdot x^2}{48 \cdot E \cdot I} \cdot \left(3 \cdot L^2 - 5 \cdot L \cdot x + 2 \cdot x^2 \right)$$

Reações no apoio A

$RA := \frac{5 \cdot q \cdot L}{8}$ $\quad MA := \frac{q \cdot L^2}{8}$