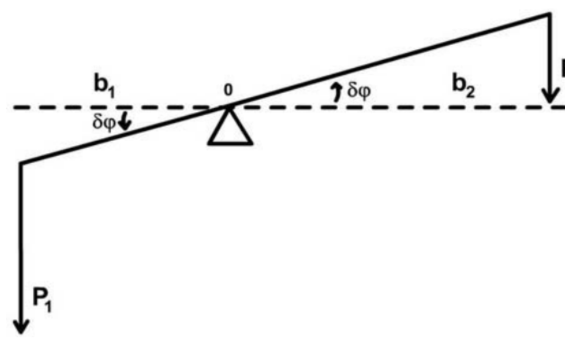
Universidade Federal de Pernambuco
Projeto Estrutural
Prof - Adriano Dayvson
Engenharia Naval
adrianodayvson.github.io

Princípio dos Trabalhos Virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais estipula que o trabalho virtual das forç externas equivale ao trabalho virtual das forças internas. Neste contexto, a palavra virtual significa que as forças e os deslocamentos envolvidos podem não corresponder um ao outro, somente é necessário que as forças estejam estaticamente admissíveis e os deslocamentos cinematicamente admissíveis, em outras palavras, verifica se é compatível com as restriçõe: impostas via apoios externos e ligações internas.

Exemplo: Solução balanço

Seja b1 e b2 comprimentos dos braços com P1 e P2 nas extremidades. Aplicando o princípio imaginasse que um dos braços saísse do equilíbrio devido a um peso infinitesimal adicionado a um dos braços.Seja δs1 o arco descrito pela extremidade do braçob1 e δs2 o arco descrito pelo braço b2. Estes deslocamentos são gerados devido a um deslocamento angular δφ, isto é, δs1=b1δφ e δs2=-b2δφ.



Princípio do trabalho virtual

$$\delta W := P1 \cdot \delta s1 + P2 \cdot \delta s2$$

$$0 := \left(P1 \cdot b1 \cdot \delta\varphi - P2 \cdot b2 \cdot \delta\varphi\right)$$

$$\left(P1 \cdot b1 - P2 \cdot b2\right) \cdot \delta\varphi := 0$$

$$P1 \cdot b1 := P2 \cdot b2$$

Na sua interpretação, o princípio dos trabalhos virtuais dá origem a duas formas:

1. Princípio dos deslocamentos virtuais
2. Princípio das forças virtuais

Equação geral do Princípio dos Trabalhos Virtuais utilizando o Método da Carga Unitária

$$\delta := \int \frac{\vec{N} \cdot N}{E \cdot A} \, d\,s + \int \frac{x \cdot \vec{Q} \cdot Q}{G \cdot A} \, d\,s + \int \frac{\vec{M} \cdot M}{E \cdot I} \, d\,s + \int \frac{\vec{T} \cdot T}{G \cdot J} \, d\,s$$

Desprezando os termos da normal e do cortante por serem muito menores que o momento e a torção para casos bidimensionais

$$\delta := \int \frac{\vec{M} \cdot M}{E \cdot I} \, d\,s$$

Se é aplicado um deslocamento virtual a um corpo rígido sujeito a um sistema de forças em equilíbrio, o trabalho virtual total realizado pelas forças é igual a zero

Método das Forças

Na solução de uma estrutura hiperestática é necessário considerar os três grupos de condições básicas da Análise Estrutural:
condições de equilíbrio, condições de compatibilidade (continuidade interna e compatibilidade com os vínculos externos) e condições impostas pelas leis constitutivas dos materiais que compõem a estrutura.

O Método das Forças resolve o problema considerando
os grupos de condições a serem atendidas pelo modelo estrutural na seguinte
ordem:
1° Condições de equilíbrio;
2° Condições sobre o comportamento dos materiais (leis constitutivas);
3° Condições de compatibilidade.

Na prática, entretanto, a metodologia utilizada pelo Método das Forças para
analisar uma estrutura hiperestática é:
Somar uma série de soluções básicas que satisfazem as condições de equilíbr
mas não satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura
original, para na superposição restabelecer as condições de compatibilidade

A estrutura utilizada para a superposição de soluções básicas é,
em geral, uma estrutura isostática auxiliar obtida a partir da estrutura original pela eliminação de vínculos. Essa estrutura isostática é chamada de Sistema Principal (SP). As forças ou os momentos associados aos vínculos liberados são as incógnitas do problema.

Solução geral do Método das Forças:

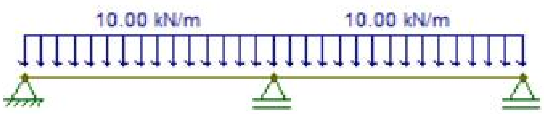
$$\{\delta 0\}+[\delta]\{X\}=\{0\}$$

Sendo:
$\{\delta 0\}$ -> vetor dos termos de carga;
$[\delta]$ -> matriz de flexibilidade;
$\{X\}$ -> vetor dos hiperestáticos.

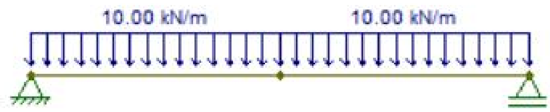
O número de equações de compatibilidade na relação matricial é igual ao gra
de hiperestaticidade da estrutura, sendo que cada equação restabelece o vínculo associado ao hiperestático genérico Xi. O termo de carga $\delta i0$ é o deslocamento ou a rotação que aparece no vínculo eliminado associado ao hiperestático Xi no caso (0).
O coeficiente δij da matriz de flexibilidade é o deslocamento ou a rotação que aparece no vínculo eliminado associado ao hiperestático Xi provocado por Xj = 1 no caso (j).

Aplicação em viga com 3 apoios

Sistemas Equivalentes



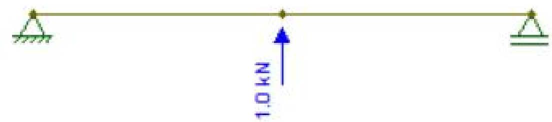
=



Sistema Principal

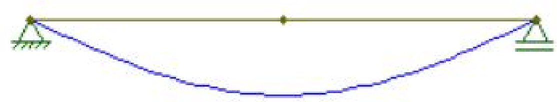
+

Sistema Virtual

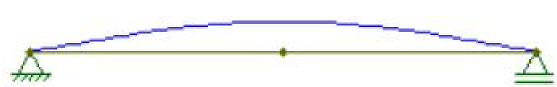


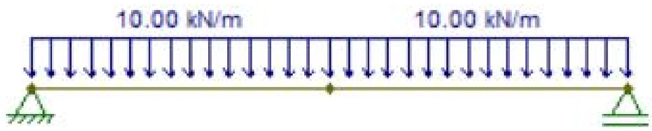
Deslocamentos

=



+

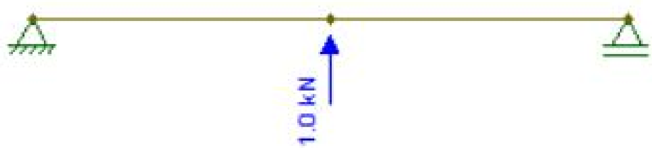




$$M := 20 \cdot x - 5 \cdot x^{2} \quad 0 \le x \le 4$$

Sistema Principal

Sistema Virtual



$$\vec{M} := -0,5 \cdot x \quad 0 \le x \le 2$$

$$\vec{M} := 0,5 \cdot x - 2 \quad 2 \le x \le 4$$

Sistema geral de equações

$$\begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{3n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{2n} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{3n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{1} \\ X_{2} \\ X_{n} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dados do problema:

$$E := 200 \cdot 10^{9}$$

$$I := 0,001$$

$$\delta_{10} := \sum \int_{0}^{l} \frac{\overrightarrow{M(x)} \cdot M(x)}{E \cdot I} \, d\, x$$

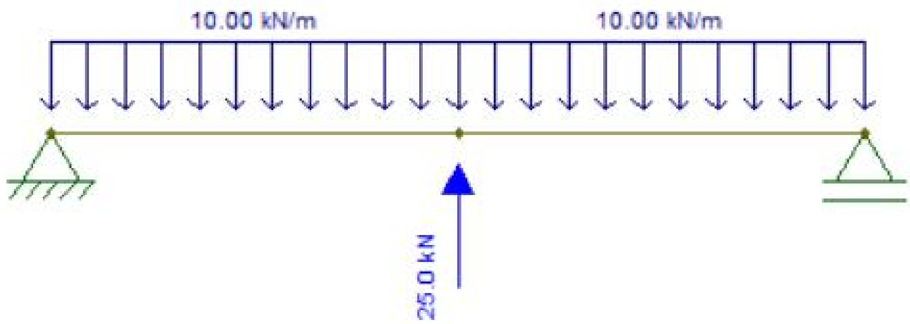
$$\delta_{11} := \sum \int_{0}^{l} \frac{M(x)^{2}}{E \cdot I} \, d\, x$$

$$\delta\_10 := \int_{0}^{2} \frac{\left(20 \cdot x - 5 \cdot x^{2}\right) \cdot \left(-0,5 \cdot x\right)}{E \cdot I} \, d\, x + \int_{2}^{4} \frac{\left(20 \cdot x - 5 \cdot x^{2}\right) \cdot \left(0,5 \cdot x - 2\right)}{E \cdot I} \, d\, x = -1,6667 \cdot 10^{-7}$$

$$\delta\_11 := \int_{0}^{2} \frac{\left(-0,5 \cdot x\right)^{2}}{E \cdot I} \, d\, x + \int_{2}^{4} \frac{\left(0,5 \cdot x - 2\right)^{2}}{E \cdot I} \, d\, x = 6,6667 \cdot 10^{-9}$$

$$X\_1 := \frac{-\delta\_10}{\delta\_11} = 25 \text{ kN}$$

Desta forma nosso novo sistema isostático assume a seguinte forma:



A solução do problema é igual a solução inicial com o apoio